

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

- Với a là số thực tùy ý: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số?}}$.
- Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức a^m , a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Lưu ý: 0^0 và 0^{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

- Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{mn}; & (ab)^m &= a^m b^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

Chú ý:

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a .
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Lưu ý: $\sqrt[n]{0} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$.

Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$$\oplus \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\oplus \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\oplus \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\oplus \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$\oplus \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Chú ý: Lũy thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

3 Lũy thừa với số mũ thực

Khái niệm lũy thừa với số mũ thực

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

Chú ý: Lũy thừa với số mũ thực (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

$$\oplus a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\oplus \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\oplus (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\oplus (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\oplus \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\oplus \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4^x = 5; 4^y = 3$. Tính 4^{x+y}

b) Cho a là số thực dương thỏa mãn $a^{2b} = 3$. Tính $K = 2a^{6b} + 4$.

c) Tính $P = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{\frac{-5}{2}}$

d) Biết rằng $\alpha; \beta$ là các số thực thỏa mãn $2^\beta(2^\alpha + 2^\beta) = 8(2^{-\alpha} + 2^{-\beta})$. Tính $\alpha + 2\beta$

Lời giải

a) $4^{x+y} = 4^x \cdot 4^y = 5 \cdot 3 = 15$.

b) Ta có: $K = 2a^{6b} + 4 = 2(a^{2b})^3 + 4 = 58$.

c) Ta có: $P = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{\frac{-5}{2}} = (2^{-4})^{\frac{-3}{4}} + (2^{-2})^{\frac{-5}{2}} = 2^3 + 2^5 = 40$.

d) Ta có: $2^\beta(2^\alpha + 2^\beta) = 8(2^{-\alpha} + 2^{-\beta}) \Leftrightarrow 2^\beta(2^\alpha + 2^\beta) = 8\left(\frac{2^\alpha + 2^\beta}{2^{\alpha+\beta}}\right) \Leftrightarrow 2^\beta \cdot 2^{\alpha+\beta} = 8$

$\Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta} = 2^3 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 3$.

Bài tập 2: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) Tính giá trị biểu thức $A = 3(3^{3x} + 3^{-3x})$ biết $3^x + 3^{-x} = 4$.

c) Tính giá trị của biểu thức $A = \left(5^{\frac{-2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$

d) Tính $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2021} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2000}$.

e) Biết $4^x + 4^{-x} = 23$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$

Lời giải

a) Ta biến đổi $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{-5}\right)^{-0,2} + \left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^1 + 2^4 = 18$.

b) Ta có:

$$3^x + 3^{-x} = 4 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^3 = 4^3 \Leftrightarrow 3^{3x} + 3^{-3x} + 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} (3^x + 3^{-x}) = 64 \Rightarrow 3^{3x} + 3^{-3x} = 52.$$

Vậy $A = 3(3^{3x} + 3^{-3x}) = 3 \cdot 52 = 156$.

c) $A = \left(5^{\frac{-2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4} = (5)^{\frac{(-2)}{5} \cdot (-5)} + \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4} \cdot (-4)} = 5^2 + ((5)^{-1})^{-3} = 5^2 + 5^3 = 25 + 125 = 150$.

d) Ta có $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2021} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2000} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 + 4\sqrt{3})^{2000} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{2000}$
 $= (7 + 4\sqrt{3}) \cdot [(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3})]^{2000} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot 1^{2000} = 7 + 4\sqrt{3}$.

e) Ta có: $4^x + 4^{-x} = 23 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 + 2^{-2x} = 25 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 25 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 5$

(Do $2^x + 2^{-x} > 0$). Vậy $P = 2^x + 2^{-x} = 5$.

Bài tập 3: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Biết $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3^x + 3^{-x}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$

c) Cho $9^x + 9^{-x} = 47$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{13 + 3^x + 3^{-x}}{2 - 3^x - 3^{-x}}$

Lời giải

a) $P = 3^x + 3^{-x} \Leftrightarrow P^2 = 9^x + 9^{-x} + 2 = 25 \Rightarrow P = 5$.

b) Ta có $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0} = \frac{2^2 + 5}{10^{-1} - 1} = \frac{4 + 5}{\frac{1}{10} - 1} = -10$.

c) Ta có $(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 49 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 7$.

Do vậy $P = \frac{13 + 3^x + 3^{-x}}{2 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{13 + 3^x + 3^{-x}}{2 - (3^x + 3^{-x})} = \frac{13 + 7}{2 - 7} = -4$. Vậy $P = \frac{13 + 3^x + 3^{-x}}{2 - 3^x - 3^{-x}} = -4$.

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

$$\oplus a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\oplus \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\oplus (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\oplus (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\oplus \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\oplus \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x}} \ (x > 0)$

b) $\sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}}$ (với a, b là hai số thực dương)

Lời giải

a) $P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x \cdot x^4} = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{12}}.$

b) $\sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức sau với a, b là các số thực dương:

a) $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$

b) $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$

c) $M = \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)}$ với $a > 0, a \neq 1.$

d) $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$

e) $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

f) $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

Lời giải

a) Ta có $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}.$

b) $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[7]{a^{-2}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{-\frac{2}{7}}} = a^{\frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \frac{2}{7}} = a^{\frac{30}{7}}$

$$\text{c) Ta có } M = \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(a^{\frac{3}{8}} - a^{-\frac{1}{8}} \right)} = \frac{a^0 - a}{a^{\frac{1}{2}} - a^0} = \frac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -(\sqrt{a}+1).$$

$$\text{d) Ta có: } P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} = \frac{a^3 b^2}{\left((a^{12} b^6)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^3 b^2}{(a^{12} b^6)^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^3 b^2}{a^2 b} = ab.$$

$$\text{e) Ta có: } A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} \right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } A &= \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{b^3} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^2 b^3} + \sqrt[6]{b^2 a^3}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^2 b^2} (\sqrt[6]{b} + \sqrt[6]{a})}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} \\ &= \sqrt[6]{a^2 b^2} = \sqrt[3]{ab}. \end{aligned}$$

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

$$\text{a) Rút gọn biểu thức } K = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$\text{b) Cho } x, y \text{ là các số thực dương. Rút gọn biểu thức } K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1}$$

$$\text{c) Cho số thực } a > 0 \text{ và } a \neq 1. \text{ Hãy rút gọn biểu thức } P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}$$

$$\text{d) Cho } x, y \text{ là các số thực dương và } x \neq y. \text{ Rút gọn biểu thức } A = \sqrt{\left(x^{2x} + y^{2x} \right)^2 - \left(4^{\frac{1}{2x}} xy \right)^{2x}}$$

Lời giải

a) Dựa vào hằng đẳng thức thứ ba ta có

$$\begin{aligned} K &= (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = \left[(\sqrt{x} + 1)^2 - \sqrt{x} \right] (x - \sqrt{x} + 1) \\ &= (x + \sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = \left[(x+1)^2 - x \right] = x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

b) Viết biểu thức K dưới dạng: $K = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2} = x$

c) Ta có $P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} (1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{7}{12}} (1 - a)} = \frac{a^{\frac{5}{6}} (1 - a^2)}{a^{\frac{5}{6}} (1 - a)} = 1 + a$

d) $S = \sqrt{x^{4x} + 2(xy)^{2x} + y^{4x}} - 4(xy)^{2x} = \sqrt{x^{4x} - 2(xy)^{2x} + y^{4x}}$
 $= \sqrt{(x^{2x} - y^{2x})^2} = |x^{2x} - y^{2x}|$

Dạng 3: So sánh các lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản về so sánh

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

a) Nếu $x > y > 0$ và $a > 1$, thì $a^x > a^y$.

Áp dụng bất đẳng thức này với $x = 3\sqrt{2}$, $y = 1$, và $a = 5$ ta được: $5^{3\sqrt{2}} > 5^1 = 5$

Vậy $5^{6\sqrt{3}} > 5^{3\sqrt{6}}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{-1}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$

Với $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ ta có thể viết lại thành $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$ $2^{\frac{4}{3}} < 2^{\frac{7}{6}}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} < \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 2: Tìm điều kiện của a để $(2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7}$?

Lời giải

Điều kiện $2a-3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$

Trường hợp 1: nếu $2a-3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} (2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7} \\ -3 > -7 \end{cases} \Rightarrow 2a-3 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$

Trường hợp 2: nếu $2a-3 < 0 \Rightarrow 3-2a > 0$

$(2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7} \Leftrightarrow -(3-2a)^{-3} \geq -(3-2a)^{-7} \Leftrightarrow (3-2a)^{-7} \geq (3-2a)^{-3}$
 $\Rightarrow \begin{cases} (3-2a)^{-7} \geq (3-2a)^{-3} \\ -7 < -3 \end{cases} \Rightarrow 0 < 3-2a \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a < \frac{3}{2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} 1 \leq a < \frac{3}{2} \\ a \geq 2 \end{cases}$

Bài tập 3: Với những giá trị nào của a thì

a) $a^e > a^\pi$

b) $(a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $a > 0$. Vì $\begin{cases} e < \pi \\ a^e > a^\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ nên $0 < a < 1$.

b) Điều kiện: $a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Vì $\begin{cases} 2 < \sqrt{5} \\ (a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$ nên $1 < a < 2$.

Bài tập 4: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $A = 199^{2023}$; $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B .

b) Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

Lời giải

a) $B = \sqrt{199}^{2024} = 199^{\frac{1}{2} \cdot 2024} = 199^{1012}$

Ta có $199 > 1$ nên $\Rightarrow 199^{2023} > 199^{1012} \Rightarrow A > B$ nên ta suy ra $A > B$.

b) $C = 1331^{1000} = (11^3)^{1000} = 11^{3000}$

Ta có: $11 > 1; 11^{4001} > 11^{2000} \Rightarrow B > C$

Lại có: $3^{4999} < 3^{5000} = (3^5)^{1000} = 243^{1000} < 1331^{1000} \Rightarrow A < C$

Vậy $B > C > A$.

Bài tập 5: So sánh ba số sau: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$

Lời giải

Ta có: $(0,2)^{0,3} = (0,2)^{\frac{3}{10}} = \left[(0,2)^3 \right]^{\frac{1}{10}} = (0,008)^{\frac{1}{10}}$.

$(0,7)^{3,2} = (0,7)^{\frac{32}{10}} = \left[(0,7)^{32} \right]^{\frac{1}{10}}$.

$\sqrt{3}^{0,2} = (3)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10}} = 3^{\frac{1}{10}}$.

Do $(0,7)^{32} < 0,008 < 3$ nên $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$.

$10^7 = 78125 \cdot 2^t \Rightarrow t = \log_2 \left(\frac{10^7}{78125} \right) = 7$.

Phương pháp: Bài toán lãi kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n = T_0(1+r)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^N$. Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Với số tiền gốc $P = 120$ triệu đồng, lãi suất $r = 0.05$ (vì lãi suất được biểu thị dưới dạng số thập phân), và số kỳ gửi trong một năm $n = 2$ (vì một năm có 2 kỳ gửi 6 tháng), số kỳ gửi trong 2 năm là $N = 4$.

Áp dụng công thức tính lãi suất kép: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^N = 120\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^4 \approx 136.047$ triệu đồng.

Vậy sau 2 năm, bác An sẽ nhận được khoản tiền là khoảng 136.047 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Bài tập 2: Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 30 năm, dân số của quốc gia sẽ tăng gấp đôi, tức là sẽ đạt mức 38 triệu người. Ta có công thức tính tỉ số tăng trưởng dân số là: $2 = 2^{\frac{t}{30}}$
Từ đó, ta có thể tìm được số năm tương ứng với tốc độ tăng dân số như vậy là:

$$\frac{t}{30} = \log_2 2 = 1 \Rightarrow t = 30.$$

Vậy sau 30 năm kể từ năm 2021, tức là năm 2051, dân số của quốc gia này sẽ đạt mức 38 triệu người.

Để tính dân số sau 20 năm kể từ năm 2021, ta có thể tính tỉ số tăng trưởng dân số trong 20 năm

như sau: $2^{\frac{20}{30}} = 2^{\frac{2}{3}}$

Vậy dân số của quốc gia này sau 20 năm, tức là năm 2041, sẽ đạt mức: $19 \times 2^{\frac{2}{3}} \approx 27.076$ triệu người

Bài tập 3: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ là

Lời giải

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con nên ta có

$$300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{1}{5} \ln 3.$$

Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ là

$$S_{10} = 100.e^{10r} = 100.e^{10 \cdot \frac{1}{5} \ln 3} = 100.e^{2 \cdot \ln 3} = 100.e^{\ln 9} = 100 \cdot 9 = 900 \text{ (con)}.$$

Bài tập 4: Cho biết đầu năm 2018 dân số Việt Nam là 93,7 triệu và tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu (Biết dân số Việt Nam được tính theo công thức $S = Ae^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là số dân sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số).

Lời giải

Ta có $S = Ae^{ni} = 93,7.e^{12 \cdot 0,012} = 108,21$ triệu dân.

Bài tập 5: Dân số Việt Nam được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2020, Việt Nam có khoảng 97,76 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 1,14%. Hỏi năm 2030 Việt Nam sẽ có bao nhiêu triệu người nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Áp dụng công thức $S = Ae^{ni}$ ta có dân số năm 2030 là:

$$S = 97,76.e^{10 \cdot 1,14\%} = 109,56 \text{ (triệu người)}.$$

Bài tập 6: Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017 dân số Việt Nam là 93671600 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2030 là bao nhiêu người?

(Tổng cục thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79).

Lời giải

Ta có $S = Ae^{nr} = 93671600.e^{13 \cdot 0,0081} \approx 104073257$.

Bài tập 7: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó lĩnh được số tiền:

$$\text{Ta có: } A_n = A_0(1+r)^n = 100.000.000 \left(1 + \frac{0,4}{100}\right)^6 = 102.424.128$$

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243 101 250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi lãi suất kỳ hạn một năm của ngân hàng MSB là r . Áp dụng công thức lãi suất kép

$P = a(1+r)^n$ trong đó ta có :

$$243101250 = 200000000(1+r)^4 \Leftrightarrow (1+r)^4 = \frac{243101250}{200000000}$$

$$\Leftrightarrow 1+r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} - 1 \Leftrightarrow r = 0,05.$$

Bài tập 9: Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

Lời giải

Với a là số tiền ông Đại đóng vào hằng tháng, $r\%$ lãi suất ông Đại gửi tiết kiệm hằng tháng.

Gọi P_n là số tiền mà ông Đại thu được sau n tháng ($n \geq 1$).

Suy ra

$$P_1 = a.(1+r\%).$$

$$P_2 = (P_1 + a)(1+r\%) = a.(1+r\%)^2 + a.(1+r\%)$$

$$P_3 = (P_2 + a)(1+r\%) = a.(1+r\%)^3 + a.(1+r\%)^2 + a.(1+r\%)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_n = (P_{n-1} + a)(1+r\%) = a.(1+r\%)^n + a.(1+r\%)^{n-1} + \dots + a.(1+r\%)$$

Xét cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = a.(1+r\%)$ và công bội $q = 1+r\%$ thì

$$P_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Vậy số tiền ông Đại nhận được từ ngân hàng sau 5 năm là

$$P_{60} = u_1 \frac{1-q^{60}}{1-q} = 5.(1,0033) \cdot \frac{1-(1,0033)^{60}}{0,0033} \approx 332 \text{ triệu đồng.}$$

Bài tập 10: Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

Lời giải

Gọi m , r , T_n , a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất ($n=1$) thì còn lại: $T_1 = m(r+1) - a$.

Sau khi hết tháng thứ hai ($n=2$) thì còn lại: $T_2 = [m(r+1) - a](r+1) - a$

$$= m(r+1)^2 - a(r+1) - a = m(r+1)^2 - a(r+2) = m(r+1)^2 - \frac{a}{r}[(r+1)^2 - 1].$$

Sau khi hết tháng thứ ba ($n = 3$) thì còn:

$$T_3 = \left[m(r+1)^2 - \frac{a}{r}[(r+1)^2 - 1] \right] (r+1) - a = m(r+1)^3 - \frac{a}{r}[(r+1)^3 - 1].$$

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m(r+1)^n - \frac{a}{r}[(r+1)^n - 1]$

$$\text{Áp dụng công thức trên, ta có } T_n = 0 \Leftrightarrow a = \frac{m(r+1)^n r}{(r+1)^n - 1} = \frac{12 \cdot 10^5 \left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60}}{\left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60} - 1}.$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$ bằng:

A. $a^{\frac{3}{2}}$.

B. $a^{\frac{-2}{3}}$.

C. $a^{\frac{2}{3}}$.

D. $a^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Với $a > 0$, ta có $\sqrt{a^3\sqrt{a}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Câu 2: Cho các số thực a, b, m, n ($a, b > 0$). Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

B. $(a^m)^n = a^{m+n}$.

C. $(a+b)^m = a^m + b^m$.

D. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Lời giải

Theo tính chất của lũy thừa ta có: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Câu 3: Cho $a = \frac{1}{256}$ và $b = \frac{1}{27}$. Tính $A = a^{-\frac{3}{4}} + b^{-\frac{4}{3}}$

A. 23.

B. 89.

C. 145.

D. 26.

Lời giải

Thay $a = \frac{1}{256}$, $b = \frac{1}{27}$ vào $A = a^{-\frac{3}{4}} + b^{-\frac{4}{3}}$ ta được

$$A = a^{-\frac{3}{4}} + b^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = (4^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (3^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 4^3 + 3^4 = 145.$$

Câu 4: Với a là số thực dương, biểu thức $P = a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$.

B. $a^{\frac{2}{5}}$.

C. $a^{\frac{5}{6}}$.

D. $a^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

$$P = a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Câu 5: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}$ bằng:

A. $a^{\frac{2}{3}}$.

B. a^5 .

C. $a^{\frac{5}{6}}$.

D. $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

$$P = a^{\frac{1}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Câu 6: Giá trị $\sqrt[3]{2021} \cdot \sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$

B. $2021^{\frac{1}{15}}$

C. $2021^{\frac{8}{15}}$

D. $2021^{\frac{1}{10}}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt[3]{2021} \cdot \sqrt[5]{2021} = (2021)^{\frac{1}{3}} \cdot (2021)^{\frac{1}{5}} = (2021)^{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = (2021)^{\frac{8}{15}}$.

Câu 7: Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $P = a^{\frac{2}{5}}$. B. $P = a^{-\frac{1}{15}}$. C. $P = a^{\frac{1}{15}}$. D. $P = a^{\frac{19}{15}}$.

Lời giải

Ta có $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ ($x > 0$) bằng

- A. $x^{\frac{4}{3}}$. B. $x^{\frac{1}{2}}$. C. $x^{\frac{1}{6}}$. D. $x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

$$P = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A. $a^{\frac{14}{15}}$. B. $a^{\frac{2}{15}}$. C. $a^{\frac{1}{15}}$. D. $a^{\frac{17}{3}}$.

Lời giải

Với a là số thực dương ta có $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{14}{15}}$

Câu 10: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\sqrt{10^\alpha} = (\sqrt{10})^\alpha$. B. $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$. C. $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. D. $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Công thức đúng: $(10^\alpha)^2 = 10^{2\alpha}$.

Câu 11: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $(5^\alpha)^2 = 25^\alpha$. B. $(5^\alpha)^2 = 5^{\alpha^2}$. C. $\sqrt{5^\alpha} = (\sqrt{5})^\alpha$. D. $\sqrt{5^\alpha} = 5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Ta có: $(5^\alpha)^2 = 25^\alpha = 5^{2\alpha}$ và $\sqrt{5^\alpha} = (\sqrt{5})^\alpha = 5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 12: Cho a là số thực dương. Giá trị của biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ bằng

- A. $a^{\frac{2}{3}}$. B. $a^{\frac{7}{6}}$. C. a^5 . D. $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

$$P = a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}.$$

- Câu 13:** Nếu $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}} > b^{\sqrt{5}}$ thì
A. $a < 1; 0 < b < 1$. **B.** $a > 1; b < 1$. **C.** $0 < a < 1; b < 1$ **D.** $a > 1; 0 < b < 1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, lại có $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{6}} \Rightarrow a > 1$.

Ta có: $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, lại có $b^{\sqrt{3}} > b^{\sqrt{5}} \Rightarrow 0 < b < 1$.

- Câu 14:** Xét α, β là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. **B.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$. **C.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$. **D.** $3^\alpha < 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Lời giải

Ta có $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

- Câu 15:** Cho $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$.

Lời giải

Vì $a > 1$ nên $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

- Câu 16:** So sánh hai số m và n nếu $(\sqrt{3}-1)^m < (\sqrt{3}-1)^n$.

- A.** Không so sánh được. **B.** $m < n$. **C.** $m = n$. **D.** $m > n$.

Lời giải

Vì $0 < \sqrt{3}-1 < 1$ nên ta có: $(\sqrt{3}-1)^m < (\sqrt{3}-1)^n \Leftrightarrow m > n$.

- Câu 17:** Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab} = \left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

- A.** $\frac{1}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{19}$. **D.** $\frac{76}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab} = \left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab} \Leftrightarrow 4^{-2(a^2+ab)} = 4^{\frac{3}{8}(a^2-7ab)} \Leftrightarrow 19a^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{19}$.

- Câu 18:** Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$, ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

- A.** $P = x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P = x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P = x^{\frac{5}{12}}$.

Lời giải

Ta có $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{4}}} = x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 19: Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Biểu thức $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = -\frac{5}{2}$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2$.

Lời giải

$$4^x + 4^{-x} = 7 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 9 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}} = \frac{5 + 3}{8 - 12} = -2.$$

Câu 20: Biết $4^x + 4^{-x} = 14$, tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

A. 4.

B. 16.

C. $\sqrt{17}$.

D. ± 4 .

Lời giải

$$\text{Ta có } 4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 4 \\ 2^x + 2^{-x} = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 4 \text{ (vì } 2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Vậy } P = 4.$$

Câu 21: Cho a là một số thực dương, tính giá trị của biểu thức $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}} = \left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}} = 2^{\frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a}} = 2^2 = 4.$$

Câu 22: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tích $a.b$ bằng

A. -10.

B. 10.

C. -8.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 25 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 5 \text{ vì } 3^x + 3^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = \frac{-5}{2}.$$

$$\text{Vậy } a.b = -10.$$

Câu 23: Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. 1.

Lời giải

Ta có $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}} = \left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}} = 2^{\frac{4}{a} \cdot \frac{a}{2}} = 2^2 = 4$.

Câu 24: Cho biểu thức $T = \frac{1}{2^{-x-1}} + 3\sqrt{2}^{2x} - 4^{\frac{x-1}{2}}$. Khi $2^x = \sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức T là

- A.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$T = \frac{1}{2^{-x-1}} + 3\sqrt{2}^{2x} - 4^{\frac{x-1}{2}} = 2^{x+1} + 3\left(\sqrt{2^2}\right)^x - \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{x-1} = 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = \frac{9}{2} \cdot 2^x = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 25: Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Khi đó biểu thức $P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{3 + 2^{x+1} + 2^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$.

Tính tổng $a + b$ có giá trị bằng

- A.** 8. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 7 + 2 = 9$. Suy ra: $2^x + 2^{-x} = 3$.

$$P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{3 + 2^{x+1} + 2^{1-x}} = \frac{5 - (2^x + 2^{-x})}{3 + 2(2^x + 2^{-x})} = \frac{5 - 3}{3 + 2 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

Suy ra: $a = 2, b = 9 \Rightarrow a + b = 11$.

Câu 26: Cho x là số thực dương. Biết $\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \sqrt{x \sqrt[3]{x}}} = x^{\frac{b}{a}}$ với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

- A.** 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \sqrt{x \sqrt[3]{x}}} = \sqrt{x \sqrt[3]{x \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{3}}}}} = \sqrt{x \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{5}{9}}} = x^{\frac{7}{9}}.$$

Khi đó $a = 9; b = 7$ nên $a + b = 16$.

Câu 27: Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

- A.** $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{1}{12}} + a^{\frac{1}{12}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right)} = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{Suy ra } m.n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Câu 28: Biết biểu thức $P = \sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}}$ ($x > 0$) được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^α . Khi đó, giá trị của α bằng

- A. $\frac{37}{15}$. B. $\frac{23}{36}$. C. $\frac{23}{30}$. D. $\frac{53}{30}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{x^3 \cdot x^{\frac{5}{6}}} = \sqrt[6]{x^{\frac{23}{6}}} = x^{\frac{23}{36}}.$$

Câu 29: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Giá trị của $M = f(2021^{2022})$ là

- A. 2021^{1011} B. $2021^{1011} + 1$ C. $-2021^{1011} + 1$ D. $-2021^{1011} - 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}} - a^{-\frac{1}{8}}\right)} = \frac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}-1} = -a^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\text{Khi đó } M = f(2021^{2022}) = -\left(2021^{2022}\right)^{\frac{1}{2}}-1 = -2021^{1011}-1.$$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Rút gọn biểu thức $A = a\sqrt{a^3\sqrt{a}\sqrt{a}}$ về dạng $a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = m^2 + n^2$.

- A. 2425. B. 539. C. 593. D. 1369.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = a\sqrt{a^3\sqrt{a}\sqrt{a}} = a \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{1+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{23}{8}} \Rightarrow m=23; n=8$$

$$\Rightarrow T = m^2 + n^2 = 23^2 + 8^2 = 593.$$

Câu 31: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m^2 - 2n = 2$. B. $m^2 + n^2 = 43$. C. $2m^2 + n = 15$. D. $m^2 + n^2 = 25$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{2}{7}}} = \frac{a^{\frac{5}{3} + \frac{7}{3}}}{a^{4 - \frac{2}{7}}} = \frac{a^4}{a^{\frac{26}{7}}} = a^{4 - \frac{26}{7}} = a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow m = 2; n = 7 \Rightarrow 2m^2 + n = 15$.

Câu 32: Cho m, n là hai số dương không đồng thời bằng 1, biểu thức $\frac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}}}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} - 1$ bằng

A. $\frac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. B. $\frac{-2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. C. $\frac{2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. D. $\frac{-2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải

Ta có:
$$\begin{aligned} \frac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}}}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} - 1 &= \frac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} - (m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} = \frac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} - m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} + 2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} \\ &= \frac{-2n^{\sqrt{3}} + 2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} = \frac{2n^{\sqrt{3}}(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}})^2} = \frac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Câu 33: Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn: $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{50} \cdot 12^{25}}$. Tính x, y ?

A. -445. B. -755. C. -450. D. -425.

Lời giải

Ta có: $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{50} \cdot 12^{25}} \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^y \cdot 2^y = \frac{2^{15} \cdot 2^{40} \cdot 3^{40}}{3^{100} \cdot 2^{25} \cdot 3^{50}} \Leftrightarrow 3^{x+y} \cdot 2^y = 3^{-85} \cdot 2^5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -85 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -90 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow xy = -450$$

Câu 34: Tại thời điểm ban đầu nếu đầu tư P đô la với tỷ lệ lãi suất được tính gộp liên tục hàng năm không đổi là r thì giá trị tương lai của khoản đầu tư này sau t năm là $B(t) = P \cdot e^{rt}$ đô la. Giả sử tỷ lệ lãi suất tính gộp hàng năm là 8%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì số tiền đầu tư ban đầu tăng thêm ít nhất 50%.

A. 5. B. 8. C. 7. D. 6.

Lời giải

Theo đề ra ta có: $P \cdot e^{0,08t} > 1,5P \Leftrightarrow e^{0,08t} > 1,5 \Rightarrow 0,08t > \ln 1,5 \Rightarrow t > \frac{\ln 1,5}{0,08} \approx 5,06$.

Câu 35: Trong khuôn viên một trường đại học có 5000 sinh viên, một sinh viên vừa trở về sau kì nghỉ và bị nhiễm virus cúm truyền nhiễm kéo dài. Sự lây lan này được mô hình hóa bởi công thức

$y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}}, \forall t \geq 0$. Trong đó y là tổng số học sinh bị nhiễm sau t ngày. Các trường đại

học sẽ cho các lớp học nghỉ khi có nhiều hơn hoặc bằng 40% số sinh viên bị lây nhiễm. Sau ít nhất bao nhiêu ngày thì trường cho các lớp nghỉ học?

A. 11.

B. 12.

C. 10.

D. 13.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}} : 5000 \geq \frac{40}{100} \Leftrightarrow 1 + 4999e^{-0,8t} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^{-0,8t} \leq \frac{3}{9998} \Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln \frac{3}{9998}}{0,8} \approx 10,14.$$

Vậy sau ít nhất 11 ngày thì trường cho các lớp nghỉ học

Câu 36: Số người trong cộng đồng sinh viên đã nghe một tin đồn nào đó là $N = P(1 - e^{-0,15d})$ trong đó P là tổng số sinh viên của cộng đồng và d là số ngày trôi qua kể từ khi tin đồn bắt đầu. Trong một cộng đồng 1000 sinh viên, cần bao nhiêu ngày để 450 sinh viên nghe được tin đồn?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } N = P(1 - e^{-0,15d}) \Leftrightarrow 450 = 1000.(1 - e^{-0,15d}) \Leftrightarrow e^{-0,15d} = \ln \frac{11}{20} \Leftrightarrow d \approx 3,98$$

Vậy cần 4 ngày để 450 sinh viên nghe được tin đồn.

Câu 37: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%.

Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2029.

B. 2020.

C. 2025.

D. 2026.

Lời giải

$$\text{Từ công thức } S = Ae^{Nr} \Leftrightarrow N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A} \text{ với } A = 78685800, r = 1,7\% = 0,017, S = 120000000$$

$$\text{Vậy } N = \frac{1}{0,017} \ln \frac{120000000}{78685800} \Leftrightarrow N \approx 24,83 \text{ (năm)}$$

Vậy sau 25 năm thì dân số nước ta ở mức 120 triệu người hay đến năm 2026 thì dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Câu 38: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác An thu được sau 5 năm (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. 125,628.

B. 130,432.

C. 127,628.

D. 125,000.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép $A = P(1 + r)^N$ với $P = 100; r = 0,05; N = 5$ ta được số tiền bác An thu về cả vốn và lãi sau 5 năm là $A = 100.(1,05)^5 \approx 127,628$ (triệu đồng).

Câu 39: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 300 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Sau ba năm vì cần tiền nên bác An đến ngân hàng rút ra 100 triệu đồng, phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hết bốn năm tiếp theo, bác An lại đến ngân hàng rút toàn bộ tiền tiết kiệm (cả gốc và lãi) về, hỏi bác An sẽ thu về được bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng,

kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. 294,000 .

B. 296,688 .

C. 300,580 .

D. 225,178 .

Lời giải

Số tiền cả gốc và lãi bác An có được sau 3 năm là $A_1 = P_1(1+r)^{N_1}$ với $P_1 = 300; r = 0,05; N_1 = 3$

Bác An rút về 100 triệu đồng nên số tiền còn lại tiếp tục gửi tiết kiệm là $P_2 = A_1 - 100$.

Hết 4 năm tiếp theo, số tiền cả gốc và lãi bác An thu được là $A_2 = P_2.(1,05)^4 \approx 300,580$ (triệu đồng).

- Câu 40:** Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $P(t) = ae^{bt}$, trong đó a, b là các hằng số, t là năm tính dân số. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2 tỉ 560 triệu người và năm 1980 là 4 tỉ 440 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2030? (Làm tròn đến hàng triệu)
- A. 19 tỉ 280 triệu. B. 10 tỉ 141 triệu. C. 15 tỉ 236 triệu. D. 11 tỉ 116 triệu.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a.e^{1950b} = 2560 \\ a.e^{1980b} = 4440 \end{cases} \quad (1) \Rightarrow e^{1980b-1950b} = \frac{4440}{2560} \Rightarrow e^{30b} = \frac{111}{64}.$$

$$\text{Khi đó: } \frac{P(2030)}{P(1950)} = \frac{a.e^{2030b}}{a.e^{1950b}} = e^{80b} = (e^{30b})^{\frac{8}{3}} = \left(\frac{111}{64}\right)^{\frac{8}{3}} \Rightarrow P(2030) = \left(\frac{111}{64}\right)^{\frac{8}{3}}.2560 \approx 11116.$$

Vậy dự đoán dân số thế giới đến năm 2030 là 11 tỉ 116 triệu người.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m.b^n = (ab)^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(a^m)^n = a^{m.n}$

d) $a^m + a^n = a^{m+n}$

Lời giải

a) Sai: $a^m.b^n = (ab)^{m+n}$.

b) Đúng: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

c) Đúng: $(a^m)^n = a^{m.n}$.

d) Sai: $a^m + a^n = a^{m+n}$.

Câu 2: Cho biểu thức $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}} = A$ và $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}} = B$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}} = (9.27)^{\frac{2}{5}}$

b) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = 3^k$ thì $k = 3$

c) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = 2^k$ thì $k = 3$

d) Phép toán $A - B$ thu được kết quả là một số tự nhiên

Lời giải

a) Đúng: $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}}$

b) Sai: $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}} = (3^2 \cdot 3^3)^{\frac{2}{5}} = (3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$.

c) Sai: $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{144}{9}\right)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

d) Đúng: $A = 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}} = (3^2 \cdot 3^3)^{\frac{2}{5}} = (3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

và $B = 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{144}{9}\right)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

Khi đó $A - B = 1$

Câu 3: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; $B = -\sqrt[4]{b}$; với $a > 0, b > 0, a \neq b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b

b) Biểu thức luôn $A > 0$

c) $A = B + \sqrt{a}$

d) $\frac{A-1}{B} = 1 - \frac{1}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} &= \frac{(\sqrt[4]{a})^2 + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} - (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) = -\sqrt[4]{b} \\ \begin{cases} A = -\sqrt[4]{b} \\ B = -\sqrt[4]{b} \end{cases} &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$

a) Đúng: Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b

b) Sai: Thu gọn $A = -\sqrt[4]{b} < 0 \quad \forall b > 0$

c) Sai: $A = B + \sqrt{a}$

d) Đúng: $\frac{A-1}{B} = 1 - \frac{1}{B}$. Do $A = B \Rightarrow \frac{A-1}{B} = \frac{B-1}{B} = \frac{B}{B} - \frac{1}{B} = 1 - \frac{1}{B}$

Câu 4: Với mọi $a > 0, b > 0$ và m, n là các số thực tùy ý. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với n là số nguyên dương.

c) Nếu $\left(\frac{5}{2}\right)^m > \left(\frac{5}{2}\right)^n$ thì $m > n$.

d) Nếu $\left(\frac{\pi}{4}\right)^m > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3m-2}$ thì $m < 1$.

Lời giải

a) Đúng: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, với $a > 0$ và m, n là các số thực tùy ý.

b) Đúng: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với n là số nguyên dương.

c) Đúng: Do $\frac{5}{2} > 1$ nên $\left(\frac{5}{2}\right)^m > \left(\frac{5}{2}\right)^n \Leftrightarrow m > n$.

d) Sai: Do $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ nên $\left(\frac{\pi}{4}\right)^m > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3m-2} \Leftrightarrow m < 3m-2 \Leftrightarrow m > 1$.

Câu 5: Với mọi số thực $a > 0, b > 0$. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{6}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3} = b^{\frac{7}{9}}$

d) $\frac{(\sqrt{ab^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}} = ab^2$

Lời giải

a) Đúng: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, với $a > 0$.

b) Sai: $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} \neq a^{\frac{1}{6}}$.

c) Sai: $\frac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3} = b^{\frac{7}{3}-3} = b^{-\frac{2}{3}} \neq b^{\frac{7}{9}}$.

d) Đúng: $\frac{(\sqrt{ab^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}} = \frac{(ab^2)^2}{\sqrt[6]{a^6b^{12}}} = \frac{a^2b^4}{ab^2} = ab^2$.

Câu 6: Cho $a > 0, b > 0$ và hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Biết m, n là các số thực thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} \sqrt{a} = a^m$

$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \left(b^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{b^{\frac{1}{4}} \left(b^{\frac{3}{4}} + b^{-\frac{1}{4}} \right)} = b^n. \text{ Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:}$$

a) $f(0) = 0$.

b) $m \in \mathbb{Q}$.

c) $m = n$.

d) Nếu $f(m-a) + f(n-b) = 2$ thì $f(a^m) + f(b^n) = 0$.

Lời giải

a) Sai: $f(0) = \frac{9^0}{9^0 + 3} = \frac{1}{4}$

b) Đúng: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \left(a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} = a \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{Q}$

c) Đúng: $\frac{b^{\frac{4}{3}} \left(b^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{b^{\frac{1}{4}} \left(b^{\frac{3}{4}} + b^{-\frac{1}{4}} \right)} = \frac{b + b^2}{b + 1} = b \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m = n$

d) Đúng: $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3} \Rightarrow f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{3}{9^x + 3} = 1 - f(x)$

$$f(m-a) + f(n-b) = 2 \Rightarrow 2 = f(1-a) + f(1-b) = 2 - f(a) - f(b) = 2 - f(a^m) - f(b^n)$$

Suy ra: $f(a^m) + f(b^n) = 0$

Câu 2. Cho a, b là số thực dương và $x, y \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $(a^x)^y = a^{x^y}$

b) Nếu $(\sqrt{2} - 1)^x < (\sqrt{2} - 1)^y$ thì $x < y$

c) Rút gọn $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ ta được $P = a^5$.

d) Nếu $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$ thì $S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) = \frac{1011}{3}$.

Lời giải

a) Sai: $(2^1)^3 = 2^3 \neq 2^{1^3}$

b) Sai: $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)^x < (\sqrt{2} - 1)^y \\ 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow x > y$

$$\text{c) Đúng : } P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5$$

$$\begin{aligned} \text{d) Đúng: } f(x) + f(1-x) &= \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x} - 2}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9 - 2 \cdot 9^x}{9 + 3 \cdot 9^x} \\ &= \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{3 - \frac{2}{3} \cdot 9^x}{3 + 9^x} = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 9^x}{9^x + 3} = \frac{3 + 9^x}{3(9^x + 3)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } S = \sum_{k=1}^{1011} \left[f\left(\frac{k}{2023}\right) + f\left(1 - \frac{k}{2023}\right) \right] = \sum_{k=1}^{1011} \frac{1}{3} = \frac{1011}{3}.$$

Câu 7: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Lãi suất của ngân hàng là 0,65 trong một năm
- b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là 532 500 000 đồng
- c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn 600 000 000 đồng.
- d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hàng và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn 670 000 000 đồng.

Lời giải

- a) Sai: Lãi suất ngân hàng là 0,065 trong một năm.
- b) Đúng: Sau một năm số tiền gửi là $500(1 + 6,5\%)^1 = 532,5$ (triệu đồng).
- c) Đúng: Đến hết năm thứ ba, số tiền người đó có được là $500(1 + 6,5\%)^3 > 600$ triệu đồng.
- d) Sai: Sau khi rút về 100 triệu đồng và tiếp tục gửi trong vòng 2 năm tiếp theo, người đó có số tiền là $\left[500(1 + 6,5\%)^3 - 100\right] \cdot (1 + 6,5\%)^2 \approx 571,621$ triệu đồng. Tổng số tiền người đó có được sau 5 năm (sau khi làm tròn) là $571,621 + 100 = 671,621$ triệu đồng, gần nhất với 671,620 triệu đồng.

Câu 8: Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Sau năm 2019. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Công thức sau n năm thì diện tích trồng rừng của tỉnh A là $A = 1000 \cdot (1 + 0,06)^{n+1}$.
- b) Vào năm 2032, diện tích rừng năm đó hơn gấp đôi năm 2019.
- c) Vào năm 2025 thì diện tích rừng năm đó đạt trên 1400 ha.
- d) Diện tích rừng vào hai năm sau kể từ năm 2019 sẽ đạt 1123,6 ha.

Lời giải

Áp dụng công thức $A = a(1+r)^n$

- a) Sai: Ta có sau n năm thì diện tích trồng mới của tỉnh A là: $A = 1000(1 + 0,06)^n$.

b) Đúng: $1000 \cdot (1 + 0,06)^n > 2000 \Rightarrow 1,06^n > 1 \Rightarrow n > 11,8$.

Vào năm 2032, diện tích rừng năm đó hơn gấp đôi năm 2019.

c) Đúng: Theo đề bài, ta có $1000 \cdot (1 + 0,06)^n > 1400 \Rightarrow 1,06^n > 1,4 \Rightarrow n > 5,774$

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng mới năm đó đạt trên 1400 ha.

d) Đúng: $n = 2 \Rightarrow 1000(1 + 0,06)^2 = 1123,6$ ha.

Câu 9: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 0,5% / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian trả nợ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền nợ sau 8 tháng là 796464780,4.

b) Số tiền nợ sau 10 tháng là 744299339,8.

c) Sau 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

d) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 45 triệu đồng thì sau hai năm anh Nam trả hết nợ.

Lời giải

a) Đúng: Gọi a là số tiền vay, r là lãi suất, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là: $N_2 = [a(1+r) - m] + [a(1+r) - m]r - m$
 $= a(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$

....

Số tiền nợ sau n tháng là:

$$N_n = a(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1] = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sau n tháng anh Nam còn nợ số tiền là: $N_n = 10^9 (1 + 0,5\%)^n - 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{(1 + 0,5\%)^n - 1}{0,5\%}$.

Số tiền nợ sau 8 tháng là 796464780,4.

b) Đúng: Số tiền nợ sau 10 tháng là 744299339,8.

c) Đúng: Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$$\Leftrightarrow 1000(1 + 0,005)^n - 30 \frac{(1 + 0,005)^n - 1}{0,005} = 0 \Leftrightarrow n = 36,55$$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

d) Đúng: Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$$\Leftrightarrow 1000(1 + 0,005)^n - 45 \cdot \frac{(1 + 0,005)^n - 1}{0,005} = 0 \Leftrightarrow n = 23,615$$

Vậy sau hai năm anh Nam trả hết nợ.

Câu 10: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$. Xét tính đúng sai của mệnh

đề sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 6% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau một năm sẽ còn lại là 95 triệu đồng.

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là 84,64 triệu đồng.

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là 5,13%

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau 14 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa.

Lời giải

a) Sai: Theo công thức $A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ ta có: $A = 100 \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right)^1 = 94$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau một năm với tỉ lệ lạm phát là 6% một năm chỉ còn lại khoảng 94 triệu đồng.

b) Đúng: Theo công thức $A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ ta có: $A = 100 \cdot \left(1 - \frac{8}{100}\right)^2 = 84,64$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm với tỉ lệ lạm phát là 8% một năm chỉ còn lại khoảng 84,64 triệu đồng.

c) Đúng: Thay $P = 100$ triệu đồng, $A = 90$ triệu đồng, $n = 2$ vào phương trình ta có:

$$90 = 100 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow r = 5,13\%$$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là khoảng 5.13 %.

d) Đúng: Thay $P = 1$ và $A = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta có: $\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = n \ln\left(1 - \frac{r}{100}\right) \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1 - \frac{r}{100}\right)} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1 - \frac{5}{100}\right)} \approx 13,51$$

Vậy sau khoảng 14 năm thì sức mua của số tiền ban đầu sẽ chỉ còn lại một nửa nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Giá trị của biểu thức $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ và $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ và $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} = (2+\sqrt{3}+1)^{-1} + (2-\sqrt{3}+1)^{-1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} = 1.$$

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-0,25} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-0,25} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,6} = \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} \\ &= (3^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (5^{-4})^{-\frac{1}{4}} - (2^{-5})^{-\frac{3}{5}} = 3^3 + 5 - 2^3 = 24 \end{aligned}$$

Câu 3: Cho $0 < a < 1$ và $b > 1$. Biết rằng biểu thức $\sqrt{\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi} = ma^\pi + nb^\pi$. với $m, n \in \mathbb{Q}$.

Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi} = \sqrt{a^{2\pi} + b^{2\pi} + 2a^\pi b^\pi - 4a^\pi b^\pi} = \sqrt{a^{2\pi} + b^{2\pi} - 2a^\pi b^\pi} = |a^\pi - b^\pi|.$$

$$\text{Vì } 0 < a < 1 \text{ và } b > 1 \text{ nên } a^\pi < b^\pi \text{ do đó } |a^\pi - b^\pi| = b^\pi - a^\pi.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi} = b^\pi - a^\pi \text{ suy ra } m = -1; n = 1.$$

$$\text{Vậy } m + n = 0.$$

Câu 4: Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 7% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Hỏi năm 2030, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là tính theo ha? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Năm 2030 thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là: } 800 \cdot (1 + 7\%)^8 \approx 1375 \text{ (ha).}$$

Câu 5: Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 850.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu đồng (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

$$\text{Năm 2025, giá bán loại xe X là } 850000000 \cdot (1 - 2\%)^5 \approx 768333000 \text{ (đồng).}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức sau đây: $P = \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a}$, với $a > 0, b > 0, a \neq b$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } P &= \left[\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2} - \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a} \\
&= \left[\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \right] \frac{1}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} + \sqrt[6]{a} = -\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \frac{1}{(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})} + \sqrt[6]{a} \\
&= \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} + \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{b} - \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{b}
\end{aligned}$$

Câu 7: Tính $P = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$ khi $x = 2024, y = 2023$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } P &= \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a} \\
&= \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)} \right] \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)} \right] \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \frac{2(x+y)}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)} \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \frac{2(x-y)}{x-y} = 2 \text{ (không phụ thuộc vào } x, y)
\end{aligned}$$

Câu 8: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}} - \frac{a+4}{a^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right)$, với a là số thực dương. Tìm giá trị của a để biểu thức $A = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Với a là số thực dương, ta có: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{2}} - \frac{a+4}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{2})^3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{2})^3} - \frac{a + 4}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{2})^3} \right) \cdot \left(\frac{a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2}{2\sqrt{a}} \right) \\
&= \left(\frac{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} + \sqrt{2})(a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2)} \right) \cdot \left(\frac{a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2}{2\sqrt{a}} \right) \\
&= \left(\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{2})}{(\sqrt{a} + \sqrt{2})(a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2)} \right) \cdot \left(\frac{a - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2}{2\sqrt{a}} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} = \frac{-1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

Khi đó $A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2a}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2a} = 2 \Rightarrow a = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $A = -\frac{1}{2}$ khi $a = 2$.

Câu 9: Bác An gửi ngân hàng số tiền 200 triệu đồng theo thẻ thức lãi kép với kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 3,5% / kỳ. Số tiền cả vốn và lãi được ngân hàng tính theo công thức $T = T_0(1 + r)^n$, trong đó T_0 là số tiền gốc và n là số kỳ đã gửi. Hỏi sau 3 năm bác An mới rút tiền thì bác thu được số tiền lãi là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Số tiền cả vốn và lãi sau 3 năm gửi là $T = 200 \cdot (1 + 0,035)^6 \approx 245,85$ (triệu đồng).

Vậy số tiền lãi mà bác An thu được sau 3 năm gửi xấp xỉ là $245,85 - 200 \approx 45,85$ (triệu đồng).

Câu 10: Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bởi công thức $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ. Tại độ sâu 3 (m), cường độ ánh sáng giảm bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 (m)?

Lời giải

Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 (m) là $I_1 = I_0 \cdot 2^{-\frac{1}{4}}$.

Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 (m) là $I_2 = I_0 \cdot 2^{-\frac{3}{4}}$.

Ta có $\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0 \cdot 2^{-\frac{3}{4}}}{I_0 \cdot 2^{-\frac{1}{4}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \approx 0,71 = 71\%$

Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 (m) giảm khoảng 29% so với cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 (m).